PART3　2 倍角の公式，半角の公式

要点 ①　2 倍角の公式

正弦・余弦・正接の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

において，β を α におき換えると，次の公式が得られる。

2 倍角の公式

1　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

この公式により，角が 2α の三角関数を，その半分の角 α の三角関数で表すことができる。

例　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求める。

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin 2\alpha=$　　　　　$=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha=$　　　　　$=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}-\dfrac{16}{25}=-\dfrac{7}{25}$

要点 ②　半角の公式

余弦の 2 倍角の公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より

$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$　よって　$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$　よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

が成り立つ。それぞれの式において，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ でおき換えると，次の公式が得られる。

半角の公式

1　$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2　$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

この公式により，角が α の三角関数を，その倍の角 2α の三角関数で表すことができる。

例　$\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求める。

$$\frac{\pi}{8}=\underline{\qquad\qquad}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}$　　より　$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\frac{\pi}{8}=\underline{\qquad\qquad}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{\pi}{8}$　　より　$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

半角の公式 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ より

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

が得られる。また，2 倍角の公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ より

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

が得られる。

3 $0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Point Pickup

2 倍角の公式

1 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2 倍角の公式で，角が「半分」の三角関数で表すことができる。

半角の公式

1 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

2 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

3 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

半角の公式で，角が「2 倍」の三角関数で表すことができる。

※ $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

第11講　PART3 確認問題

$0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

1 $\sin 2\alpha=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$

2 $\cos 2\alpha=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$

3 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{クケ}}}$

4 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\boxed{コ}}{\sqrt{\boxed{サシ}}}$

PART3 2倍角の公式，半角の公式

3 $0<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$

[解答]

$0<\alpha<\pi$ より，$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=-\dfrac{7}{25}$

(2) $0<\alpha<\pi$ より $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}=\dfrac{5+3}{10}=\dfrac{4}{5}$　　よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}=\dfrac{5-3}{10}=\dfrac{1}{5}$　　よって　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

第 11 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：24，ウエ：25

[解説]

$0<\alpha<\pi$ より，$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

したがって

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{[A]}$$

$$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{24}{25}}$$

[A]　2 倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2

[正解] オ：7，カキ：25

[解説]

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ より，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ であるから

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \text{[B]}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{7}{25}}$$

[B]　2 倍角の公式

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1$$

3 **[正解]** クケ：10

[解説]

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\quad\text{[C]}$$

$$=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{5-4}{10}=\frac{1}{10}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$

したがって

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

[C]　半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

4 **[正解]** コ：3，サシ：10

[解説]

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\quad\text{[D]}$$

$$=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{5+4}{10}=\frac{9}{10}$$

$0<\alpha<\pi$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

したがって

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

[D]　半角の公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$